RELACIJA

10. Neka je $\varrho \subset A \times B$, tada je ϱ (*binarna*) *relacija u skupu* $A \times B$. Ako je $A = B$, onda se kaže da je ϱ *relacija u skupu* A.
Umjesto $(x, y) \in \varrho$ uobičajeno je pisati $x\varrho y$. Slično $(x, y) \notin \varrho \Leftrightarrow x \operatorname{non} \varrho y$.

11. Neka je $\varrho \subset S \times S$, tada su moguća svojstva relacije ϱ, na primjer:

11.1. *refleksivnost*: $(\forall a \in S)\, a\varrho a$;

11.2. *simetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \Rightarrow b\varrho a$;

11.3. *antisimetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho a \Rightarrow a = b$;

11.4. *tranzitivnost*: $(\forall a, b, c \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho c \Rightarrow a\varrho c$.

12. Binarna relacija ϱ u S je *relacija ekvivalencije* ako je *refleksivna*, *simetrična* i *tranzitivna*. Takva relacija se često označava sa $\sim$.

13. Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija* (*djelimičnog, parcijalnog*) *uređenja*. Relacija uređenja najčešće se označava sa $\leqq$ ili sa $\geqq$. Za skup S u kome je definisana relacija $\leqq$ (parcijalnog) uređenja kaže se da je (*parcijalno*) *uređen* tom relacijom.
Ako je skup S uređen relacijom $\leqq$ koja ima osobinu

$$(\forall a, b \in S)\,(a \leqq b) \vee (b \leqq a),$$

kaže se da je S tom relacijom *totalno* (*potpuno*) uređen.

FUNKCIJA

14. Neka su X i Y dva neprazna skupa. *Preslikavnje* ili *funkcija* f *skupa* X u *skup* Y je pravilo prema kome se svakom $x \in X$ pridružuje jedno i samo jedno $y \in Y$. Tu činjenicu zapisujemo na jedan od slijedećih načina:

$$f: X \to Y;\ f:(x, y),\ x \in X,\ y \in Y;\ X \xrightarrow{f} Y;\ x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x) = y \in Y,$$

gdje se x naziva *original* (*nezavisno promjenljiva*),

$y = f(x)$ *slika* (*zavisno promjenljiva*), a

X se naziva *definicioni* skup (ili *domen*) preslikavanja.

Gornja definicija funkcije može se kraće zapisati:

$$f: X \to Y \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)\,(\exists!\, y \in Y)\, f(x) = y.$$

Moguća je slijedeća veza između funkcije i relacije:
Relacija $f \subset X \times Y$ je funkcija $f: X \to Y$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(1) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$;

(2) $\cup \{x \mid (x, y) \in f\} = X$.

15. Neka je $f: X \to Y \wedge A \subset X$, tada je $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A)\, y = f(x)\}$.

16. Neka je $f: X \to Y$. Ako je $f(X) = Y$, tada kažemo da je f *preslikavanje skupa* X *na* skup Y ili da je f *surjekcija* (ili *preslikavanje na*).

17. Ako važi implikacija

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, onda se f naziva *uzajamno jednoznačno* (*preslikavanje*) ili *injekcija*, ili $1-1$ preslikavanje (sa X u Y).

18. Preslikavanje f koje je $1-1$ i *na* zove se *bijekcija*. Ako su X i Y konačni, onda se za bijekciju $f: X \to Y$ kaže da je *permutacija*.

19. Ako je $f: A \to B$ i $g: B \to C$, onda je *složeno preslikavanje* $gf: A \to C$ (ili *kompozicija preslikavanja* f i g) definisana sa

$$(\forall x \in A)\,(gf)(x) = g(f(x)).$$

20. Preslikavanje $f: X \to X$ definisano sa $f(x) = x$ za svako $x \in X$ naziva se *identičkim preslikavanjem* skupa X.

21. Ako je $f: X \to X$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ takvo da su složena preslikavanja ff^{-1} i $f^{-1}f$ identička preslikavanja, tj. takva da je

$$(\forall y \in f(X))\, f(f^{-1}(y)) = y \wedge (\forall x \in X)\, f^{-1}(f(x)) = x,$$

tada preslikavanje f^{-1} nazivamo *inverznim preslikavanjem* preslikavanja f.

22. Ako je $f: X \to Y$ obostrano jednoznačno preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ i ono je jedinstveno.

---

* Renatus Cartesius je latinsko ime i prezime francuskog matematičara i filozofa Dekarta (René Descartes, 1596 – 1650).

ZADACI

8. Ispitati osobine binarnih relacija:

a) $=$, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ na skupu realnih brojeva;

b) inkluzije $\subset$ na $P(S)$, tj. na partitivnom skupu skupa S;

c) $=$ u skupu brojeva $A \subset R$;

d) paralelnost $\|$ u skupu pravih u Euklidovoj** ravni R^2;

e) okomitost $\perp$ u skupu pravih u R^2;

f) $(N, |)$, gdje je N skup prirodnih brojeva i

$$a|b \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in N)\, b = ka \, (a, b \in N).$$

g) „a je relativno prosto prema b“, tj. kraće $(a, b)=1$, gdje su $a, b \in N$;

h) relacije kongruentnosti, koja se definiše na sljedeći način:

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in Z)\, a - b = km, \ (a, b, m \in Z, \ m \neq 0).$$

(Ako a, b nisu kongruentni (mod m), to se zapisuje kao $a \not\equiv b \pmod{m}$).

RJEŠENJA

8. a) $=$ je relacija ekvivalencije na skupu relanih brojeva, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ su relacije poretka;
b) $\subset$ je relacija poretka na $P(S)$; c) $=$ je relacija ekvivalencije u skupu brojeva $A \subset R$;
d) $\|$ u skupu pravih iz R^2 je relacija ekvivalencije; e) $\perp$ je simetrična;
f) relacija poretka; g) $(a, b)=1 \Rightarrow (b, a)=1$; h) relacija ekvivalencije;